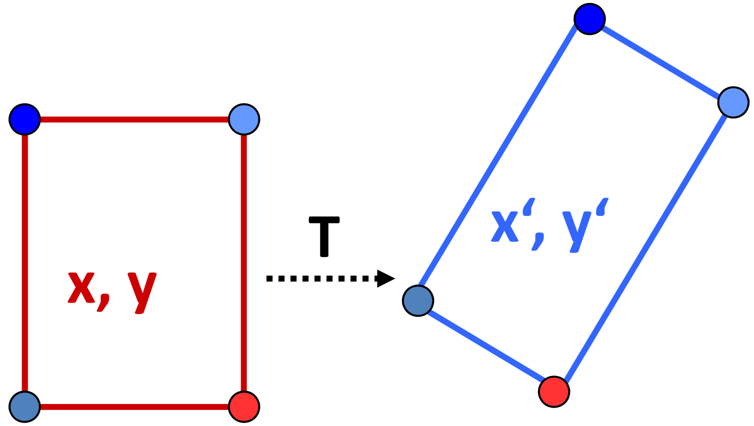
Ebene Bildkoordinatentransformationen

Ebene Bildkoordinatentransformation

Verschiebung (Translation)

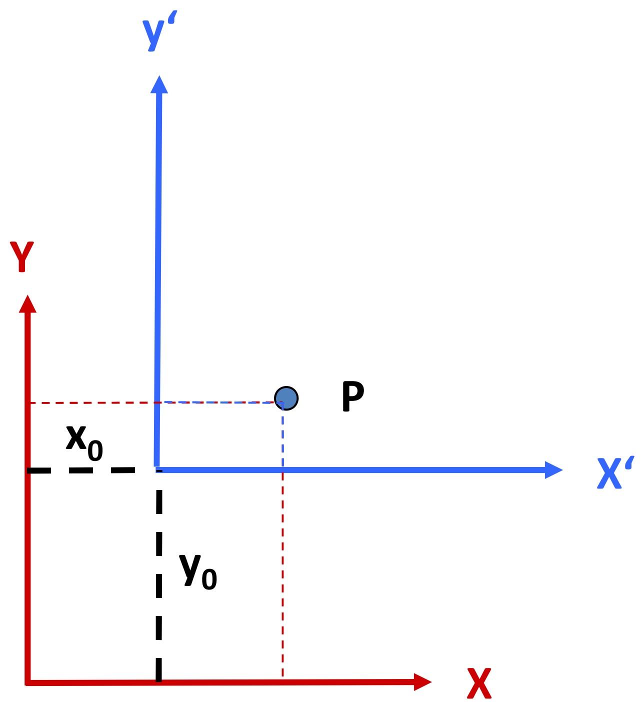
(2 Parameter):



Über Translationen werden die Parallel-Verschiebungen zweier ebener Koordinatensysteme beschrieben.

Ebene Bildkoordinatentransformation

Translationen:



Ebene Bildkoordinatentransformation

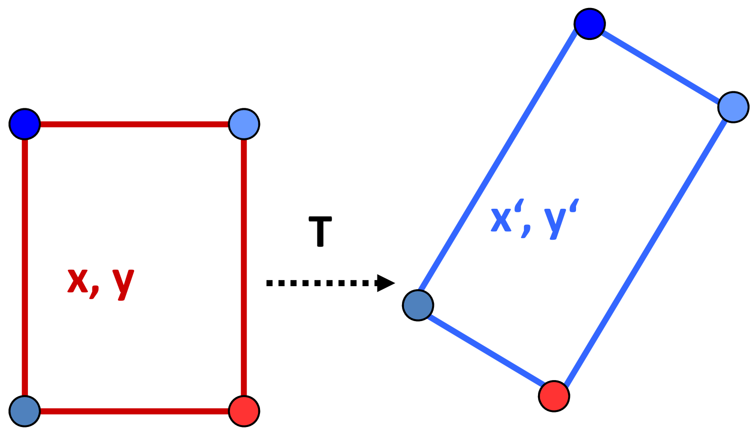
Translationen:

$$x' = a_0 + x$$
$$y' = b_0 + y$$

Mit $a_0 = x_0$ und $b_0 = y_0$ folgt

$$x' = x_0 + x$$
$$y' = y_0 + y$$

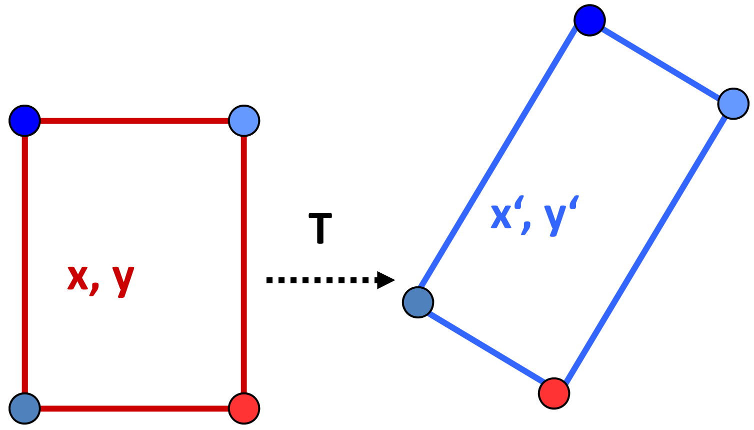
x_0, y_0 – Translationen



Ebene Bildkoordinatentransformation

Drehung (Rotation)

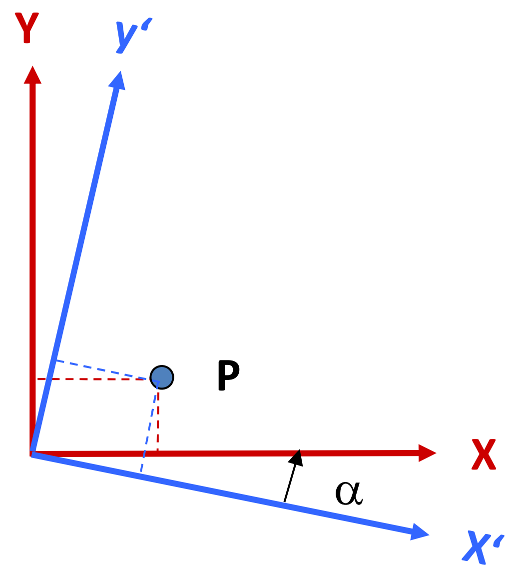
(1 Parameter):



Über die Rotation wird die gegenseitige Verdrehung zweier ebener Koordinatensysteme beschrieben.

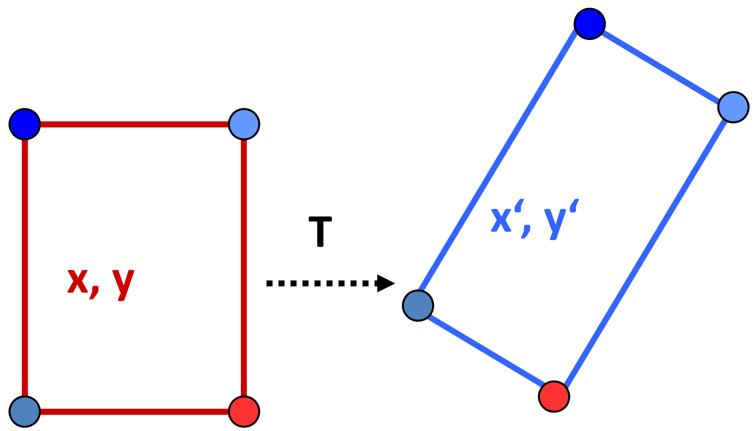
Ebene Bildkoordinatentransformation

Rotation:



Ebene Bildkoordinatentransformation

Rotation:



$$x' = a_1*x - b_1*y$$
$$y' = b_1*x + a_1*x$$

Mit a_1=cos α und b_1= sin α folgt

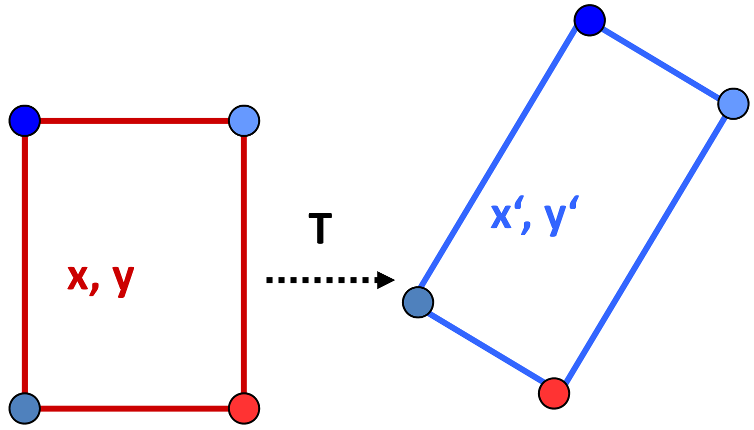
$$x' = x*\cos\alpha - y*\sin\alpha$$
$$y' = x*\sin\alpha + y*\cos\alpha$$

α – Drehwinkel

Ebene Bildkoordinatentransformation

<u>Dreh-Verschiebung</u>

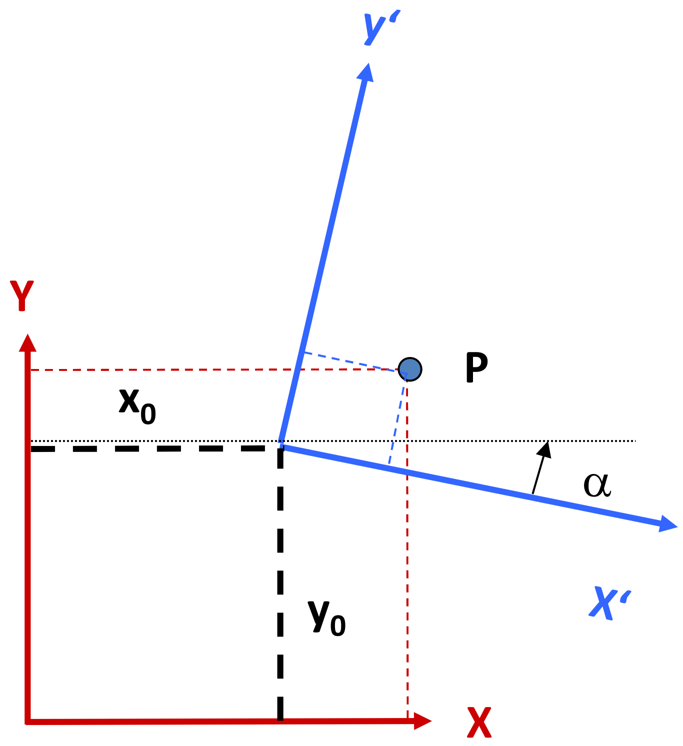
<u>(3 Parameter):</u>



Die Dreh-Verschiebung beschreibt die Rotation und gleichzeitige Translation zweier ebener Koordinatensysteme.

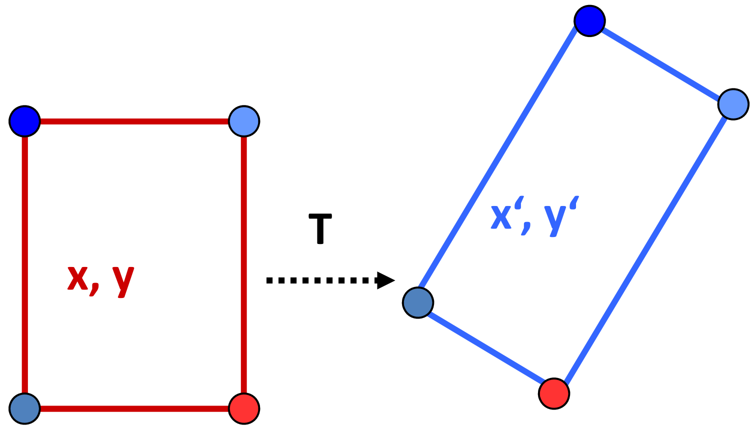
Ebene Bildkoordinatentransformation

Dreh-Verschiebung:



Ebene Bildkoordinatentransformation

Dreh-Verschiebung:



$x' = a_0 + a_1 * x - b_1 * y$
$y' = b_0 + b_1 * x + a_1 * x$

Mit $a_0 = x_0$ und $b_1 = y_0$ sowie

$a_1 = \cos\alpha$ und $b_1 = \sin\alpha$ folgt

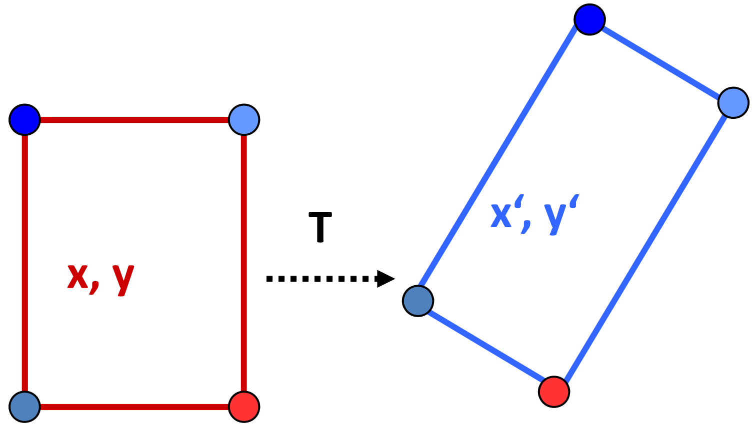
$x' = x_0 + x * \cos\alpha - y * \sin\alpha$
$y' = y_0 + x * \sin\alpha + y * \cos\alpha$

x_0, y_0 – Translationen
α – Drehwinkel

Ebene Bildkoordinatentransformation

Ebene Helmerttransformation

(4 Parameter):

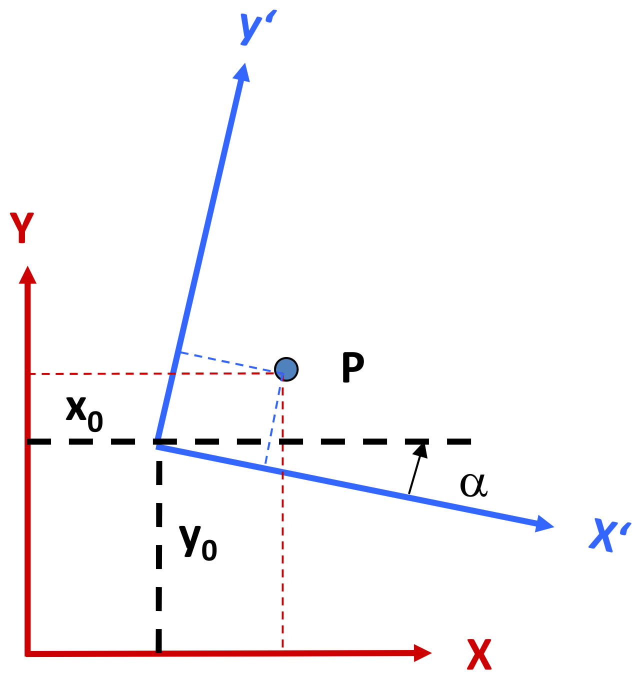


Die ebene Helmerttransformation dient der Transformation zweier ebener Koordinatensysteme mit

- 2 Verschiebungen
- 1 Drehwinkel und
- 1 Massstab

Ebene Bildkoordinatentransformation

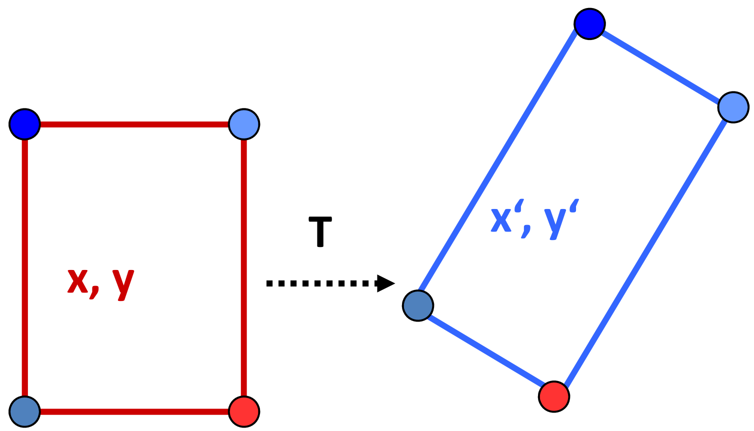
Ebene Helmerttransformation:



Ebene Bildkoordinatentransformation

Ebene Helmerttransformation:

$$x' = a_0 + m*(a_1*x - b_1*y)$$
$$y' = b_0 + m*(b_1*x + a_1*x)$$



Mit $a_0=x_0$ und $b_1= y_0$ sowie

$a_1=\cos\alpha$ und $b_1= \sin\alpha$ folgt

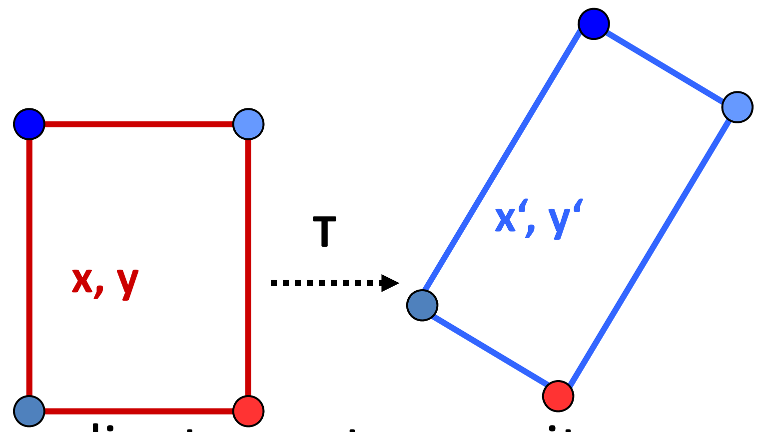
$$x' = x_0 + m*(x*\cos\alpha - y*\sin\alpha)$$
$$y' = y_0 + m*(x*\sin\alpha + y*\cos\alpha)$$

x_0, y_0	– Translationen
α	– Drehwinkel
m	– Massstabsfaktor

Ebene Bildkoordinatentransformation

Ebene Affintransformation

(6 Parameter):

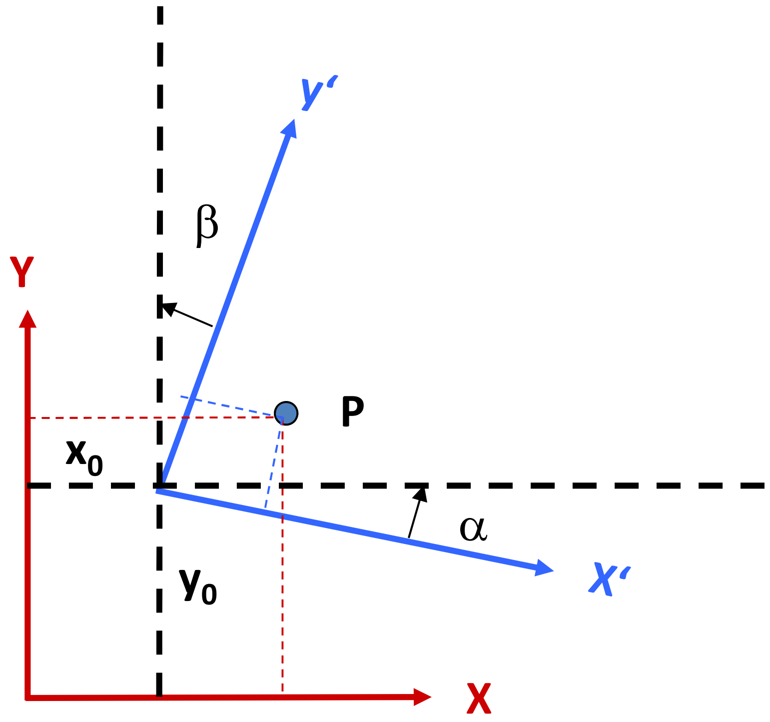


Die ebene Affintransformation dient der Transformation zweier ebener Koordinatensysteme mit

- 2 Verschiebungen
- 1 Drehwinkel
- 1 Scherungswinkel und
- 2 getrennten Massstäben

Ebene Bildkoordinatentransformation

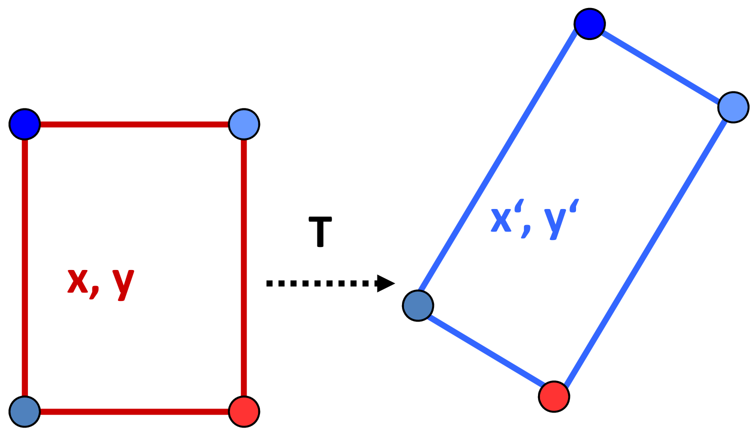
Ebene Affintransformation:



Ebene Bildkoordinatentransformation

Ebene Affintransformation:

$$x' = a_0 + a_1*x + a_2*y$$
$$y' = b_0 + b_1*x + b_2*x$$



Mit $a_0=x_0$ und $b_0=y_0$ folgt

$$x' = x_0 + m_x*x*\cos\alpha - m_y*y*\sin(\alpha+\beta)$$
$$y' = y_0 + m_x*x*\sin\alpha + m_y*y*\cos(\alpha+\beta)$$

x_0, y_0 – Translationen
α – Drehwinkel
β – Scherungswinkel
m_x, m_y – Massstabsfaktoren für x und y

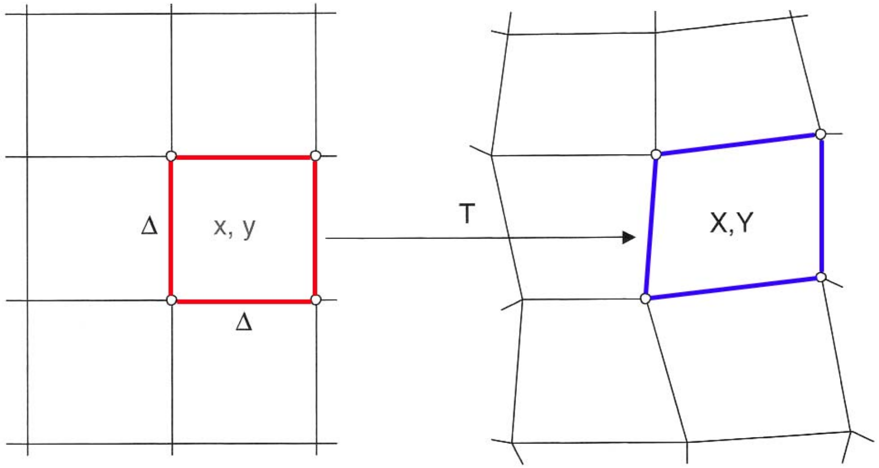
Ebene Bildkoordinatentransformation

Bilineare Transformation:

Ist eine Erweiterung der Affintransformation um ein gemischtes Glied.

$$x' = a_0 + a_1 * x + a_2 * y + a_3 * x * y$$
$$y' = b_0 + b_1 * x + b_2 * x + b_3 * x * y$$

Die bilineare Transformation wird z.B. bei der zwangsfreien Transformation und Interpolation von Vierecksmaschen genutzt (Réseaugitter, digitale Oberflächenmodelle).



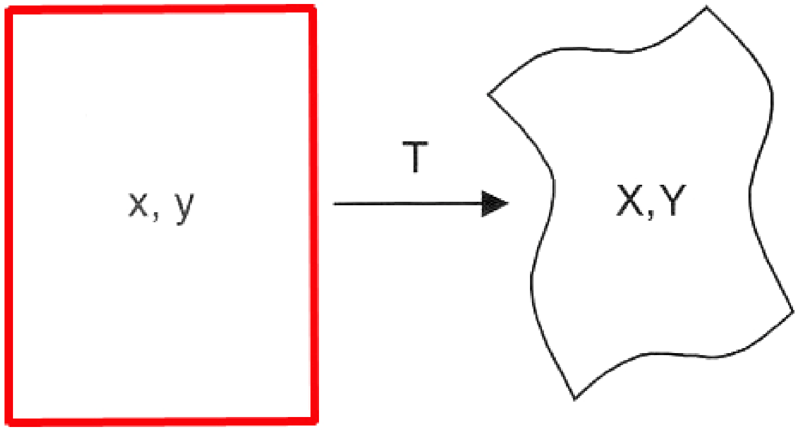
Ebene Bildkoordinatentransformation

Polynomtransformation

Mit Polynomen vom Grade n lassen sich nicht lineare Verformungen beschreiben.

$$X = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_{ji} * x^{j-i} * y^{i}$$

$$Y = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} b_{ji} * x^{j-i} * y^{i}$$



mit n: Grad des Polynoms

Bei n=1:

Affintransformation

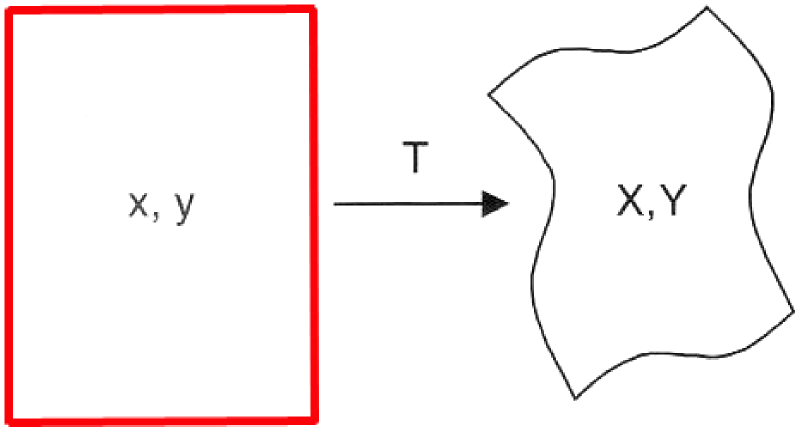
Ebene Bildkoordinatentransformation

Polynomtransformation

Mit Polynomen vom Grade n lassen sich nicht lineare Verformungen beschreiben.

$$x' = a_{00} + a_{10}*x + a_{11}*y + a_{20}*x^2 + a_{21}*x*y + a_{22}*y^2$$
$$y' = b_{00} + b_{10}*x + b_{11}*y + b_{20}*x^2 + b_{21}*x*y + b_{22}*y^2$$

Polynom mit n=2



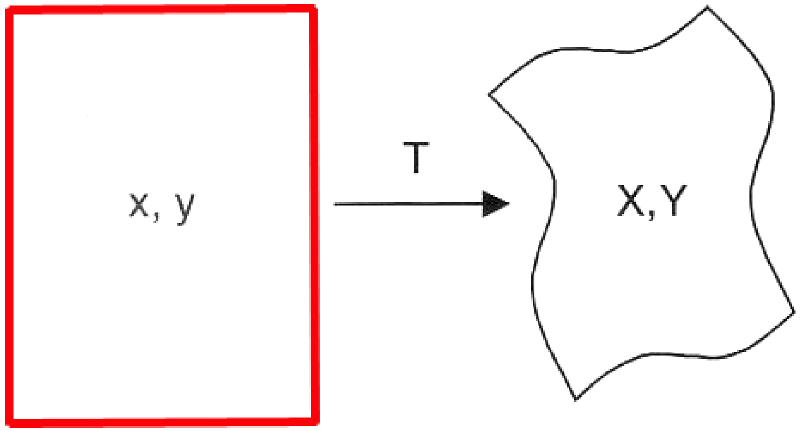
Ebene Bildkoordinatentransformation

Polynomtransformation

Die Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten beträgt

u=(n+1)*(n+2)

Zur Bestimmung der u Koeffizienten sind mindestens u/2 Punkte notwendig.

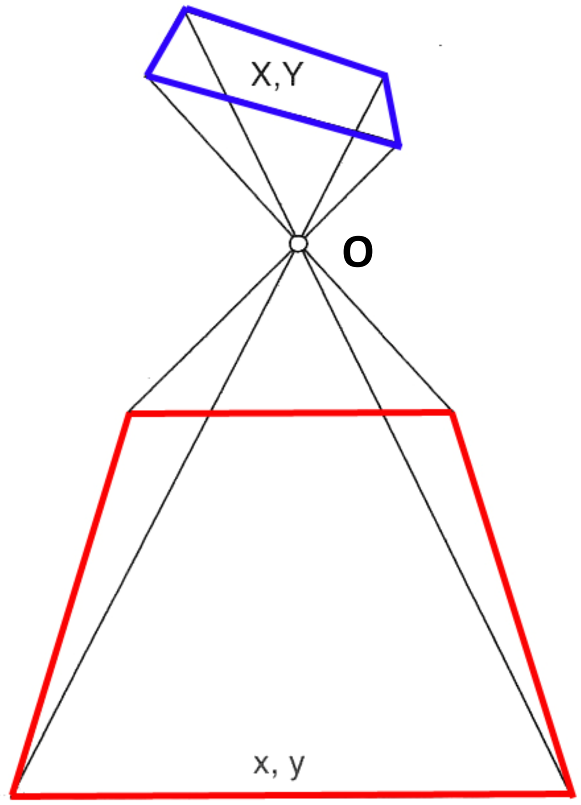


Ebene Bildkoordinatentransformation

Projektivtransformation

Die Projektivtransformation beschreibt die zentralprojektive Abbildung zweier ebener Koordinatensysteme aufeinander.

Sämtliche Abbildungsstrahlen durchlaufen geradlinig das Projektionszentrum O.



Ebene Bildkoordinatentransformation

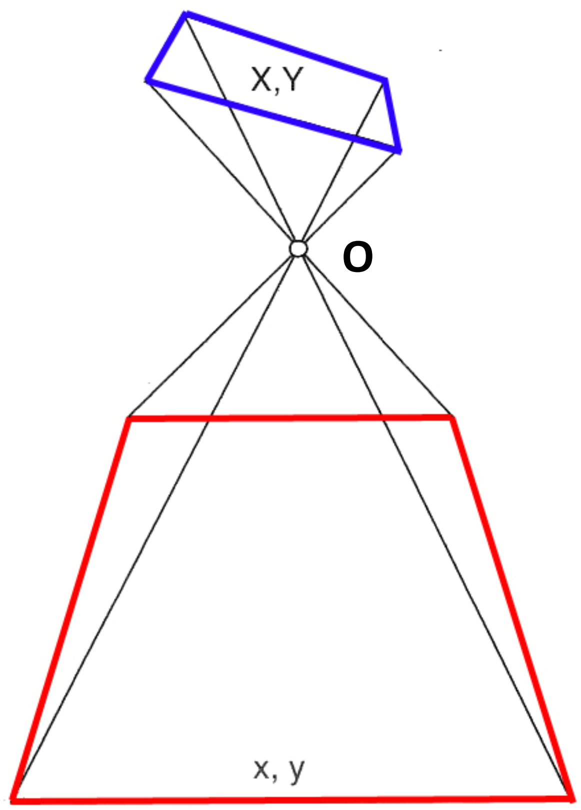
Projektivtransformation

Die Transformationsgleichung lautet:

$$X = \frac{a_o + a_1 * x + a_2 * y}{1 + c_1 * x + c_2 * y}$$

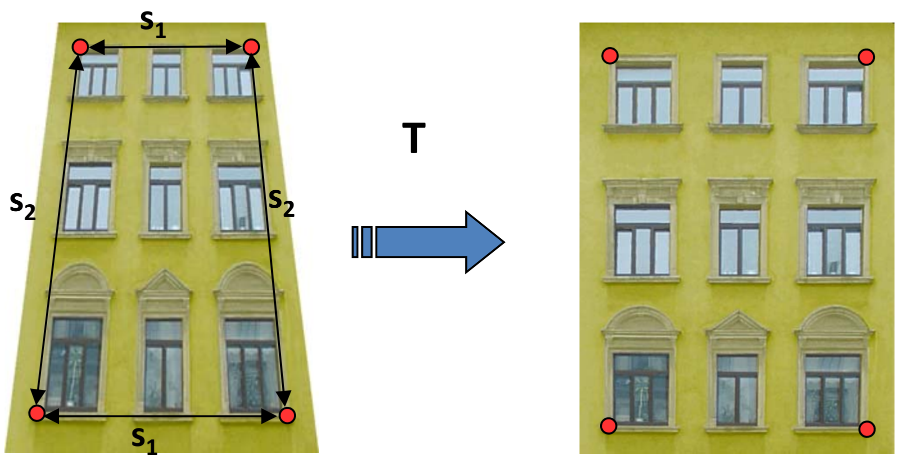
$$Y = \frac{b_o + b_1 * x + b_2 * y}{1 + c_1 * x + c_2 * y}$$

Zur Bestimmung der 8 Koeffizienten müssen 4 identische Punkte vorliegen, von denen nicht mehr als 3 auf einer Geraden liegen dürfen.



Anwendung der Projektivtransformation

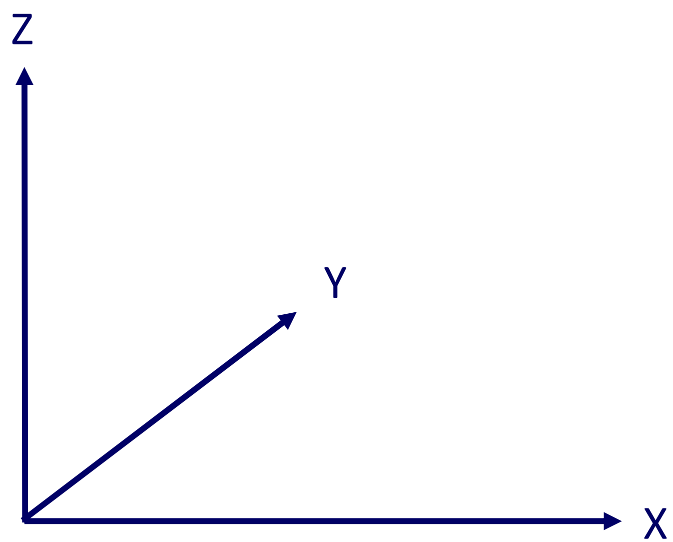
Kubit Photoplan ist ein Beispiel für eine einfach zu bedienende Softwarelösung zur Erstellung digitaler maßstabsgerechter Darstellungen aus Fotos. Datengrundlage sind ein oder mehrere Messbilder bzw. Fotos eines Objektes, die auf zu definierende Objektebenen entzerrt werden. Die Software liefert die notwendigen Bilddaten und Geometrieinformationen zur Erstellung von Zeichnungen, Bildplänen oder digitalen 3D-Modellen mit weiterverarbeitenden Programmen.



Räumliche Bildkoordinatentransformationen

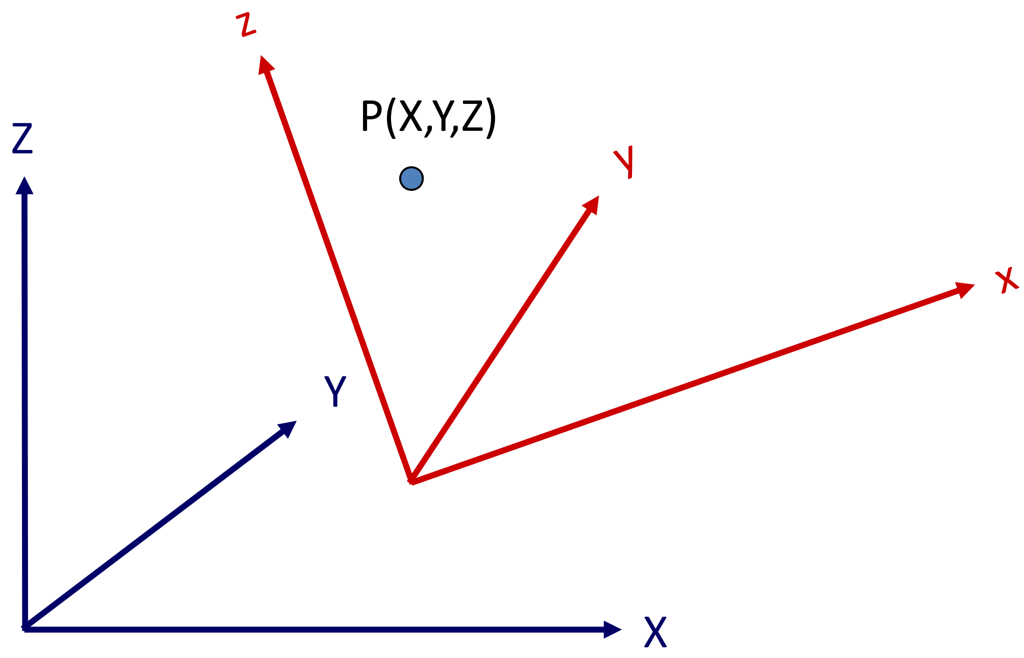
Räumliche (3D-) Koordinatensysteme

Die Auswertung (Punktbestimmung) in der Photogrammetrie erfolgt in räumlich kartesischen Koordinatensystemen.



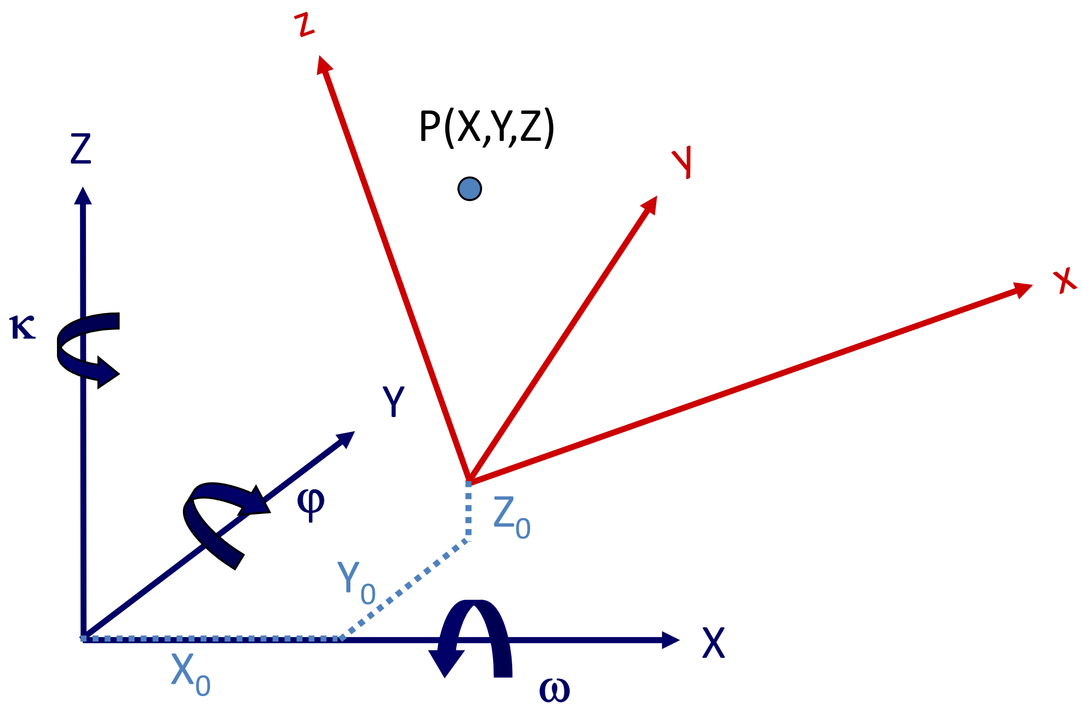
Räumliche (3D-) Koordinatensysteme

Liegen 3D-Punkte in einem Ausgangssystem vor und sind in ein Zielsystem zu transformieren, so werden hierfür 3D-Transformationen genutzt.



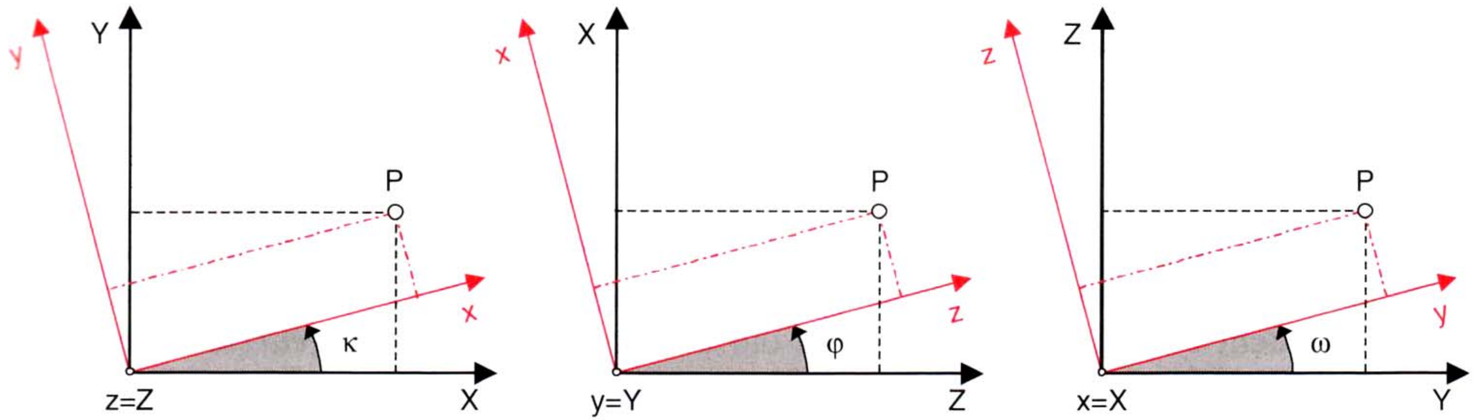
Räumliche (3D-) Koordinatensysteme

Die notwendigen Transformationsparameter setzen sich zusammen aus Translationen und Rotationen.



Räumliche Drehungen

Während in ebenen Transformationen die Rotationen um einen Drehpunkt definiert sind, werden räumliche Drehungen nacheinander um die drei Achsen des räumlichen Koordinatensystems ausgeführt.



Drehmatrix mit Eulerschen Winkeln

<u>Drehung mit ω um die X-Achse:</u> $D(\omega,0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega\\ 0 & \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}$

<u>Drehung mit φ um die Y-Achse:</u> $D(0,\varphi,0)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}$

<u>Drehung mit κ um die Z-Achse:</u> $D(0,0,\kappa)=\begin{pmatrix}\cos\kappa & -\sin\kappa & 0\\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

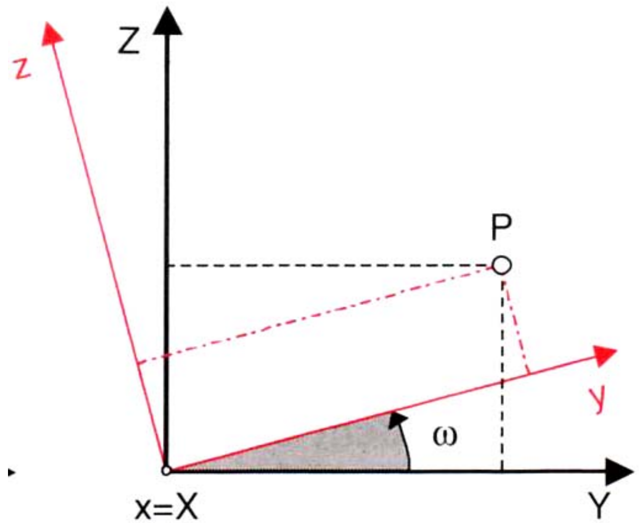
Drehung um die X-Achse

$$X = x$$
$$Y = y \cdot \cos\omega - z \cdot \sin\omega$$
$$Z = y \cdot \sin\omega + z \cdot \cos\omega$$

oder

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}_{\omega} \cdot \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Räumliche Drehungen

Die Rotationsmatrizen sind orthonormal, d.h.

$\mathbf{R^{-1} = R^T}$ und $\mathbf{R{*}R^T = E}$

Die räumliche Gesamtdrehung setzt sich aus hintereinander ausgeführten Einzeldrehungen zusammen.

Die Drehreihenfolge ist nicht beliebig!

Räumliche Drehungen

Die Gesamtdrehung wird häufig um mitgedrehte Achsen in der Reihenfolge ω, φ, κ durchgeführt.

Für die Darstellung der Koordinaten des Punktes P im *gedrehten System xyz* werden die Rotationsmatrizen in umgekehrter Reihenfolge miteinander multipliziert:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}^T * \mathbf{X}$$

mit

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T_{\kappa} * \mathbf{R}^T_{\varphi} * \mathbf{R}^T_{\omega}$$

Räumliche Drehungen

Die Transformation in das Zielsystem XYZ erfolgt mit der Gesamtdrehung:

$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\omega} * \mathbf{R}_{\varphi} * \mathbf{R}_{\kappa}$

mit

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & -\cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi \\ \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & -\sin\omega\cos\varphi \\ \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\mathbf{X} = \mathbf{R} * \mathbf{x}$

Räumliche Drehungen

Aus den Koeffizienten der räumlichen Drehmatrix **R** lassen sich die Drehwinkel berechnen:

$$\sin\varphi = r_{13}$$

$$\tan\varpi = -\frac{r_{23}}{r_{33}} \qquad \text{mit} \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\tan\kappa = -\frac{r_{12}}{r_{11}}$$

Räumliche Drehmatrizen mit Eulerschen Winkeln

Drehreihenfolge ω, φ, κ:

R= $$D(\omega,\varphi,\kappa) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & -\cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi \\ \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & -\sin\omega\cos\varphi \\ \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Drehreihenfolge φ, ω, κ:

R= $$D(\varphi,\omega,\kappa) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\kappa + \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & -\cos\varphi\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \cos\omega\sin\varphi \\ \cos\omega\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa & -\sin\omega \\ -\sin\varphi\cos\kappa + \sin\omega\cos\varphi\sin\kappa & \sin\varphi\sin\kappa + \sin\omega\cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Räumliche Drehmatrizen mit Eulerschen Winkeln

<u>Drehreihenfolge ω, φ, κ:</u>

Für den Luftbildfall gilt: ω, φ, κ -> 0

$\Rightarrow$ cosα -> 1

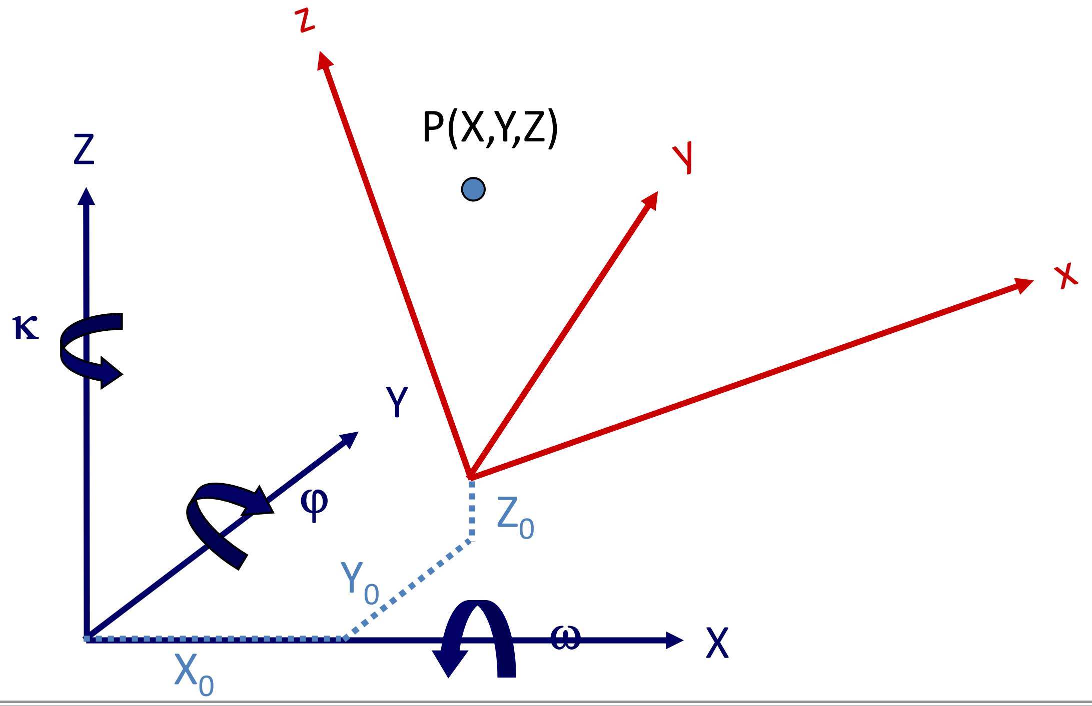
$\Rightarrow$ sinα -> dα und

$\Rightarrow$ dα · dα = 0

$$D(\omega,\varphi,\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & -d\kappa & d\varphi \\ d\kappa & 1 & -d\omega \\ d\varphi & d\omega & 1 \end{pmatrix}$$

Räumliche Ähnlichkeitstransformation

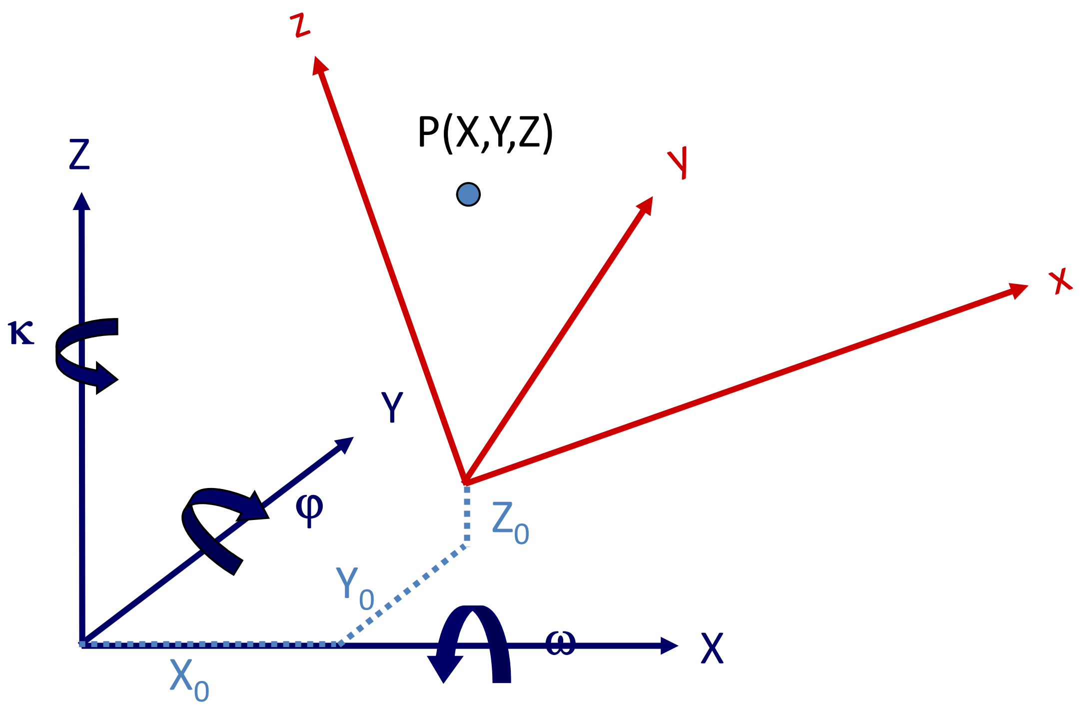
Die räumliche Ähnlichkeitstransformation dient der formtreuen Transformation eines dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem xyz in ein entsprechendes Zielsystem XYZ.



Räumliche Ähnlichkeitstransformation

Die räumliche Ähnlichkeitstransformation (**3D Helmerttransformation**) wird durch 7 Parameter beschrieben:

3 Translationen – 3 Rotationen – 1 Maßstab



Räumliche Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + m * \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

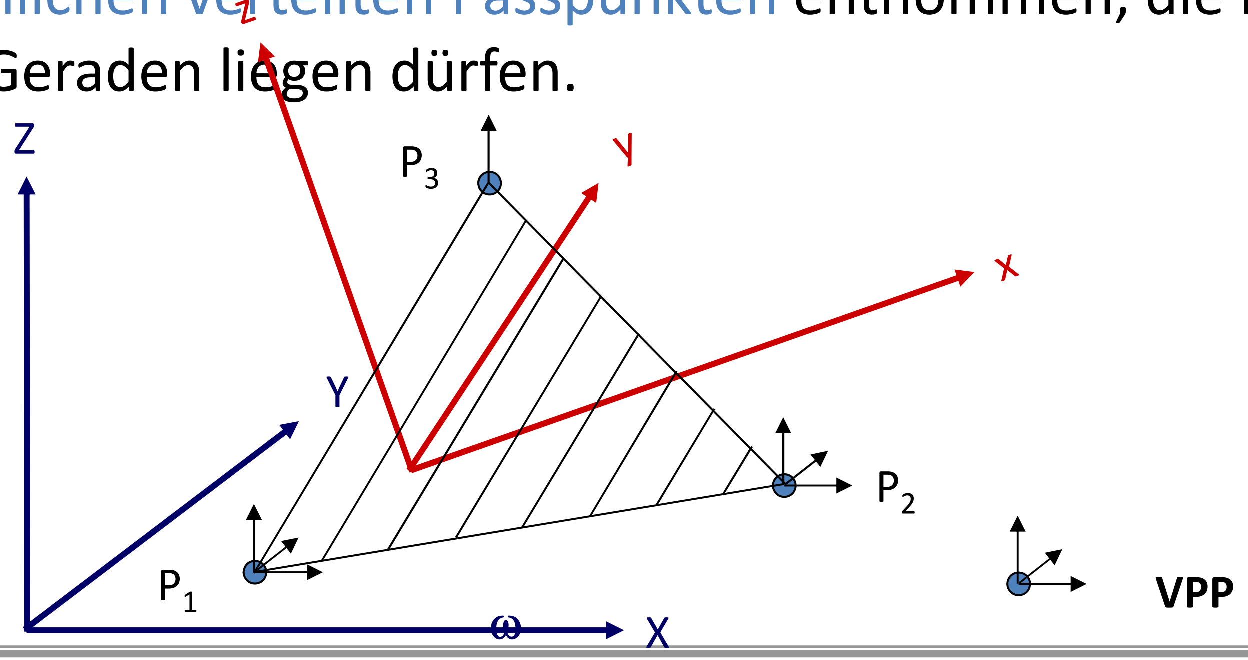
mit:

x_i y_i z_i	- Koordinaten im Modellsystem (Ausgangssystem)
X_i Y_i Z_i	- Koordinaten im Objektsystem (Zielsystem)
X_0 Y_0 Z_0	- Translationen
m	- Maßstabsfaktor
R	- räumliche Drehmatrix

Räumliche Ähnlichkeitstransformation

Zur Bestimmung der 7 Parameter sind mindestens 7 Beobachtungen erforderlich.

Diese werden aus den Koordinatenkomponenten von mindestens 3 räumlichen verteilten Passpunkten entnommen, die nicht auf einer Geraden liegen dürfen.



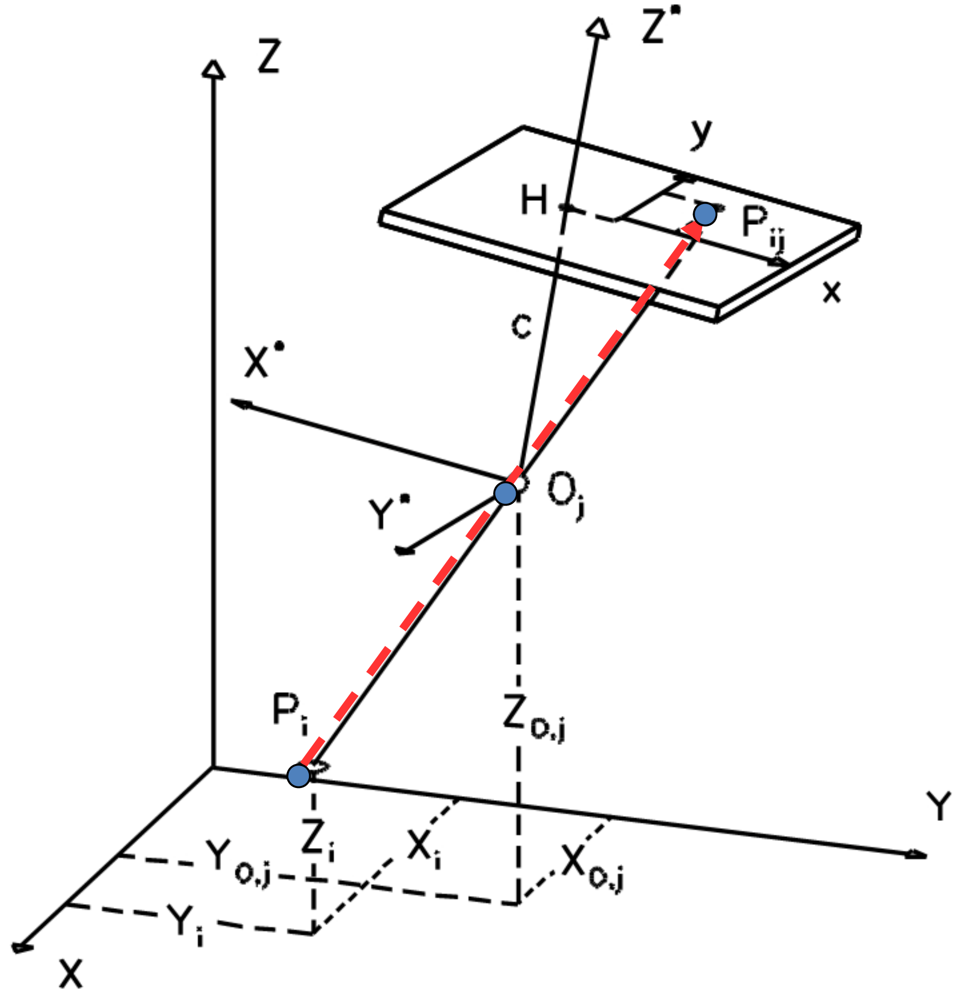
Zentralprojektion

Zentralprojektion

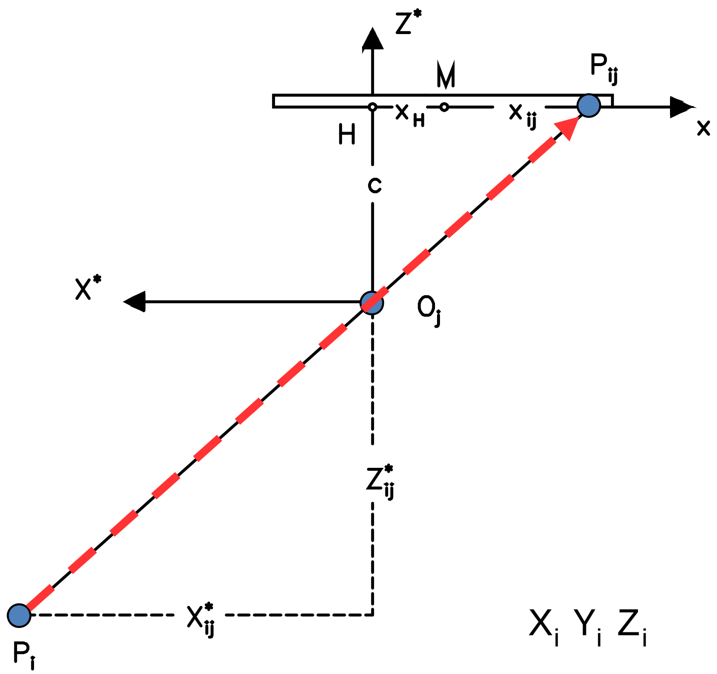
- Das Modell der Zentralprojektion ist Grundlage für viele photogrammetrische Anwendungen.

- Die Kollinaritätsbedingung beschreibt die Transformation von Objektpunkten (X,Y,Z) in entsprechende Bildkoordinaten (x‘,y‘) unter Kenntnis der inneren und äußeren Orientierung (der Kamera).

Zentralprojektion



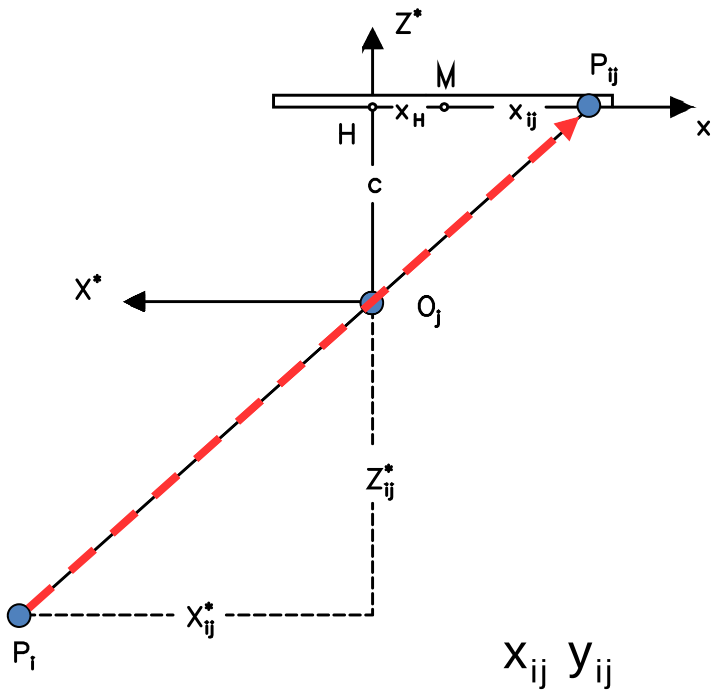
Zentralprojektion



$$\begin{bmatrix} X^*_{ij} \\ Y^*_{ij} \\ Z^*_{ij} \end{bmatrix} = \underline{D}\left(\omega_j, \varphi_j, \kappa_j\right) \cdot \begin{bmatrix} X_i - X_{O,j} \\ Y_i - Y_{O,j} \\ Z_i - Z_{O,j} \end{bmatrix}$$

$X_i\ Y_i\ Z_i$	Objektkoordinaten des Punktes i
$X_{O,j}\ Y_{O,j}\ Z_{O,j}$	Koordinaten des Projektionszentrums j
$X^*_{ij}\ Y^*_{ij}\ Z^*_{ij}$	Objektkoordinaten des Punktes i im Bild j, definiert im System des Projektionszentrums
$\underline{D}(\omega_j\ \varphi_j\ \kappa_j)$	Drehmatrix für das Bild j

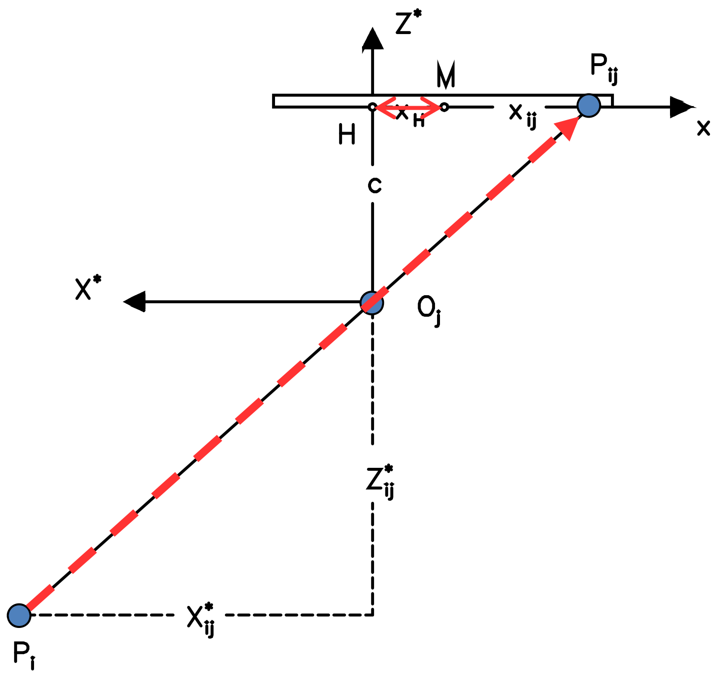
Zentralprojektion



$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \end{bmatrix} = \frac{-c}{Z^*_{ij}} \cdot \begin{bmatrix} X^*_{ij} \\ Y^*_{ij} \end{bmatrix}$$

x_{ij} y_{ij}	Bildkoordinaten des Punktes i im Bild j
c	Kamerakonstante

Zentralprojektion



Zusätzliche Parameter:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} & \boxed{\begin{matrix} -x_H \\ -y_H \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -dx \\ -dy \end{matrix}} \\ y_{ij} & & \end{bmatrix} = \frac{-c}{Z_{ij}^*} \cdot \begin{bmatrix} X_{ij}^* \\ Y_{ij}^* \end{bmatrix}$$

x_H y_H - Koordinaten des Bildhauptpunktes
dx dy- Bildfehler beschreibende Funktionen

Zentralprojektion

Beobachtungsgleichungen

$$x = x_H - c\frac{r_{11}(X - X_O) + r_{21}(Y - Y_O) + r_{31}(Z - Z_O)}{r_{13}(X - X_O) + r_{23}(Y - Y_O) + r_{33}(Z - Z_O)} + dx$$

$$y = y_H - c\frac{r_{12}(X - X_O) + r_{22}(Y - Y_O) + r_{32}(Z - Z_O)}{r_{13}(X - X_O) + r_{23}(Y - Y_O) + r_{33}(Z - Z_O)} + dy$$

r_{ik} - Elemente der räumlichen Drehmatrix